

Free-Form Surface Reconstruction Method from Second-Derivative Data

Byoung Chang Kim^{1†}, DaeWook Kim², and GeonHee Kim³

¹Department of Mechanical Engineering, Kyungnam University, University Road 7, ChangWon 631-701, Korea

²College of Optical Science, University of Arizona, 1630 E. University Blvd, Tucson, AZ 85721, USA

³Center for Analytical Instrumentation Development, Korea Basic Science Institute,
Science Road, Daejeon 305-806, Korea

(Received August 11, 2014; Revised manuscript September 25, 2014; Accepted September 30, 2014)

We present an algorithm for surface reconstruction from the second-derivative data for free-form aspherics, which uses a subaperture scanning system that measures the local surface profile and determines the three second-derivative values at those local sampling points across the free-form surface. The three second-derivative data were integrated to get a map of x- and y-slopes, which went through a second Southwell integration step to reconstruct the surface profile. A synthetic free-form surface 200 mm in diameter was simulated. The simulation results show that the reconstruction error is 19 nm RMS residual difference. Finally, the sensitivity to noise is diagnosed for second-derivative Gaussian random noise with a signal to noise ratio (SNR) of 16, the simulation results proving that the suggested method is robust to noise.

Keywords: Profilometry, Second derivative, Surface reconstruction, Free-form surface

OCIS codes: (120.3180) Interferometry; (120.3940) Metrology; (120.6650) Surface measurements, figure; (220.4840) Testing

형상이차미분을 이용한 자유곡면 형상복원법

김병창^{1†} · 김대욱² · 김건희³

¹경남대학교 기계공학부

☎ 631-701 경남 창원시 마산합포구 경남대학로 7

²College of Optical Sciences

The University of Arizona, 1630 E. University Blvd. Tucson, AZ 85721, USA

³한국기초과학지원연구원

☎ 305-806 대전광역시 유성구 과학로 169-148

(2014년 8월 11일 받음, 2014년 9월 25일 수정본 받음, 2014년 9월 30일 게재 확정)

일련의 국부영역으로부터 이차미분값을 획득하여 전체 형상을 복원하는 측정법을 제안하였다. 측정시 기울기가 제거된 국부형상에 대해 곡률과 이차미분이 동일시 되는 점을 이용하여, 3개의 이차미분값으로부터 직교하는 2방향을 따라 3차원형상을 복원할 수 있는 알고리즘을 구현하였다. 임의로 발생시킨 Zernike다항식의 계수로 자유곡면형상을 생성시키고, 구현된 알고리즘을 적용함으로써 검증과정을 수행하였다. 적용한 결과 최대 0.8 mm Sag를 갖는 직경 200 mm영역의 자유곡면형상에 대해 RMS 19 nm 형상복원오차를 갖고 복원됨을 확인하였다. 측정오차에 대한 복원오차 민감도를 진단하기 위해 SNR(Signal-to-Noise Ratio) 16의 가우시언 랜덤 노이즈를 부여한 후, 복원되는 형상의 오차를 진단한 결과, 197 nm의 형상복원오차가 발생함을 확인하였다.

Keywords: 프로파일러, 이차미분, 형상복원, 자유곡면형상

OCIS codes: (120.3180) Interferometry; (120.3940) Metrology; (120.6650) Surface measurements, figure; (220.4840) Testing

[†]E-mail: bckim@uok.ac.kr

Color versions of one or more of the figures in this paper are available online.

I. 서 론

1980년대 일본에서 시작된 메카트로닉스(Mechatronics)라는 용어는 여전히 생산자동화 및 로봇산업의 대표적인 용어로 사용되어오고 있다. 현재 국가의 대표적인 수출 주도형 분야인 스마트폰, 대형 디스플레이 분야는 기존의 메카트로닉스 기술에 광학이 접목된 광기전공학(Opto-Mechatronics)과 밀접한 관련을 맺고있다. 이들 제품의 특징은 광원에서 출발한 빛이 진행되는 동안 여러 광학부품들의 표면을 만나 굴절 또는 반사되어 최종 끝단에서 다양하고 유용한 정보들을 생성하게 된다. 진행되는 광의 경로를 결정하는 요소가 광학부품의 표면형상이므로, 최종 끝단부에서 원하는 정보를 얻기 위해서는 광학식 표면의 형상을 설계하고, 제조하고, 측정하는 작업이 매우 중요하게 관리되어야 한다. 설계, 제조, 측정이 비교적 용이한 평면 또는 구면형상들로 구성된 일련의 조합만으로도 원하는 광경로를 창출할 수 있지만, 끝단부에서 매우 높은 고품질의 광특성이 요구되거나 사용되는 광학부품의 수를 줄이기 위해서는 광부품의 형상이 비구면 또는 자유곡면으로 진화되어야 한다. 하지만 광부품 표면형상이 평면 또는 구면으로부터 벗어나는 정도가 커질수록 제조와 측정에 큰 어려움이 발생하게 된다. 자유곡면 형상은 측대칭을 벗어난 모든 형상으로 정의되며, 광학식 자유곡면형상을 측정하기 위한 대안들을 Fig.1에 나타내었다. 모든 평면 또는 임의의 반경(radius of curvature)을 가진 구면형상은 잘 제작된 기준평면과 기준구면에서 생성되는 파면과의 비교법을 통해 전체 표면형상(Full-aperture)을 한 번에 측정할 수 있다. 반면 비구면 또는 자유형상의 경우 모든 측정

형상에 대해 각각의 기준형상이 요구되므로, 측정표면형상과 기준형상을 비교하는 방법은 실제적으로 불가능하게 된다. 이러한 자유곡면형상을 측정하기 위한 대표적인 대안들을 Fig. 1과 같이 크게 3가지로 나누었다¹⁾. 3차원측정기(CMM, Coordinate Measuring Machine)는 자유곡면형상 측정에 유효한 방법이지만, 대상표면과 측정 프루브 사이에 접촉이 발생되어야 하는 단점이 있으며, 보상광학계 측정법(Null Testing)에 사용되는 보정광학계(Null Optics) 또한 초정밀 가공품으로써 단일 피측정물에 대해서만 특별히 설계된 부품이라 추가적인 자체 보정문제가 발생한다. 기존의 간섭계를 이용하여 자유곡면을 측정할 수 있는 대안으로 국부영역 측정법(Sub-aperture testing)이 제안될 수 있다. 기존 간섭계가 측정가능한 영역(Dynamic range)으로 측정범위를 한정시켜서 측정값을 획득하고, 이동하며 측정된 일련의 측정값으로부터 전체형상을 복원하는 원리를 가진다. 국부영역으로부터 획득하고 활용 가능한 측정값은 Fig. 2와 같이 국부영역 형상의 0차미분값(국부영역의 형상), 1차미분값(기울기), 2차미분값(곡률)으로 나눌 수 있다. 국부영역 형상의 0차미분값을 측정하는 sub-aperture stitching법의 경우, 수학적인 측면에서 복원이 간단하지만, 국부형상들을 좌표계상에서 규합하는 단계에서 이동기구부의 진직도, 회전, 광축정렬 등의 오차가 복원형상에 직접적으로 영향을 주는 단점을 가진다. Fig. 2(b)와 같이 일차미분값을 측정값으로 사용할 경우, 외부 절대기준의 필요성은 사라지지만 여전히 이동기구부의 정렬(Tilt-tip)에 영향을 받는다. 반면 Fig. 2(c)와 같이 국부영역의 이차미분값은 유사 곡률(quasi-curvature)로 형상 고유의 성질(intrinsic parameters)에 해당되므로 중요 시스템오차들과 독립적인 관계를 보인다.

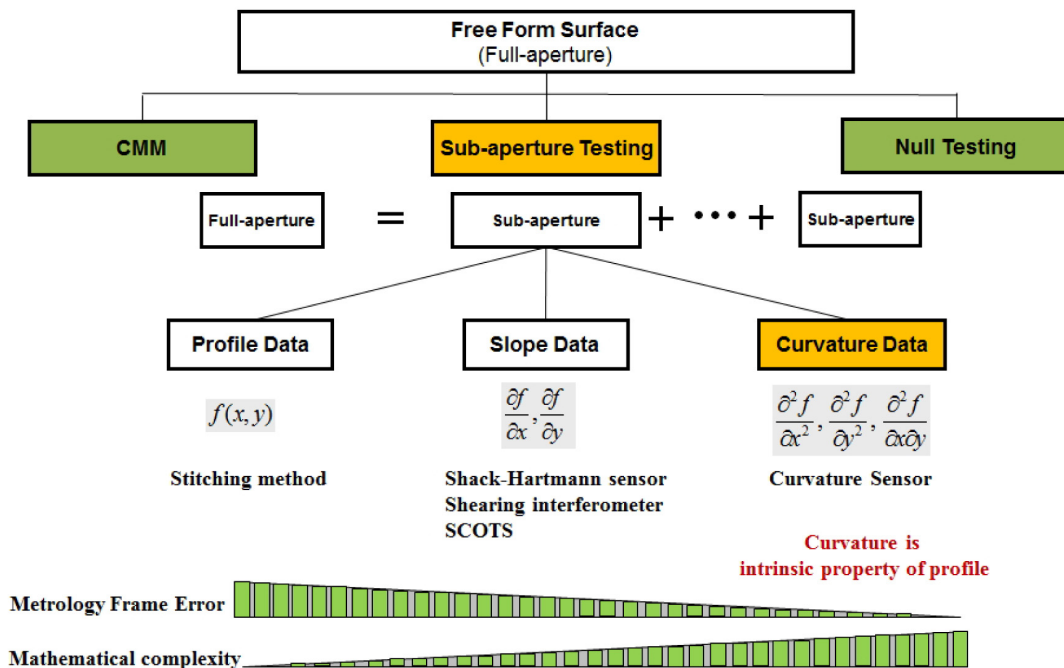


FIG. 1. The overview of freeform surface metrology.

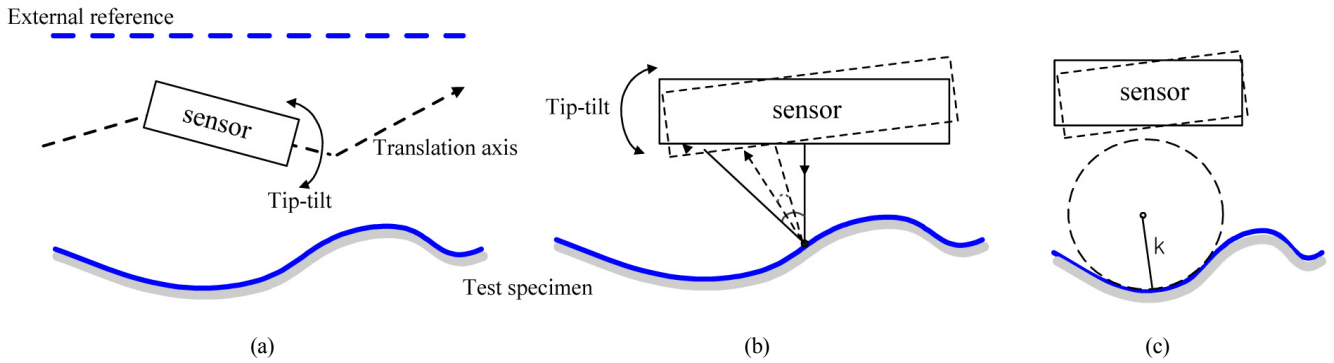


FIG. 2. Three different types of measurand obtainable from the sub-aperture, (a) Sub-aperture stitching method: 0th order derivative, (b) slope measurement method: 1st order derivative, (c) Curvature method: 2nd order derivative.

국부형상 곡률의 기하학적 특성을 이용하여 Glenn이 최초로 비구면 형상복원에 곡률값을 적용하였다.^[2, 3] 이후 PTB (Physikalisch-Technische Bundesanstalt)에서 LACS(Large Area Curvature Sensor)로 장비화 하였으며^[4-9], NIST (National Institute of Standards and Technology)에서 GEMM (GEometry Measuring Machine) 개발을 통해 자유곡면 형상의 나노미터 측정정밀도 구현을 위해 시도하였다.^[10, 11] 하지만, 곡률의 기하학적 정의로부터 전체형상을 복원할 수 있는 비선형 미분방정식 (1)은 1차원적으로만 존재하고 있어, 1축 방향을 따라 프로파일이 복원되는 수준에 그치고 있다.^[12]

$$\frac{d^2 z(y)}{dy^2} = k(y) \cdot \left[1 + \left(\frac{dz(y)}{dy} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \quad (1)$$

본 논문에서는 국부영역에서의 형상 이차미분값과 곡률값과의 관계를 정의하고, 이차미분값을 활용한 두방향 자유곡면형상 복원방법을 제안하고, 검증하고자 한다.

II. 형상이차미분을 이용한 3차원형상 복원법

식 (1)은 직교 좌표 시스템에서 1차원적 높이형상 $z(y)$ 와 곡률 $k(y)$ 의 관계를 표현한 Frenet's 비선형 미분방정식이다. 식 (1)이 의미하는 것은 주어진 형상 $z(y)$ 으로부터 각 점의 곡률 $k(y)$ 계산이 가능하며, 반대로 각 점의 곡률이 알려져 있으면 수치적 적분을 통하여 전체 형상의 복원이 가능함을 표현하고 있다. 하지만, 곡률 $k(y)$ 는 형상의 이차미분과 일차미분의 비선형 조합으로 이루어져 있으므로, 곡률을 정의하기 위해서는 이차미분과 함께 일차미분값이 정의되어야 한다. 즉, 한 지점의 형상곡률과 이차미분은 정확하게 일치하지 않음을 나타낸다. 하지만, 형상을 측정하는 방법에 따라 국부형상의 일차미분값(기울기)를 제거하고 측정값을 획득할 수 있는 방법들이 존재하므로, 경우에 따라서는 곡률이 이차미분과 동일하게 정의될 수 있는 경우가 발생하게 된다. Fig. 3과 같이 측정 프루브가 항상 각 국부영역의 수직인 방향에서

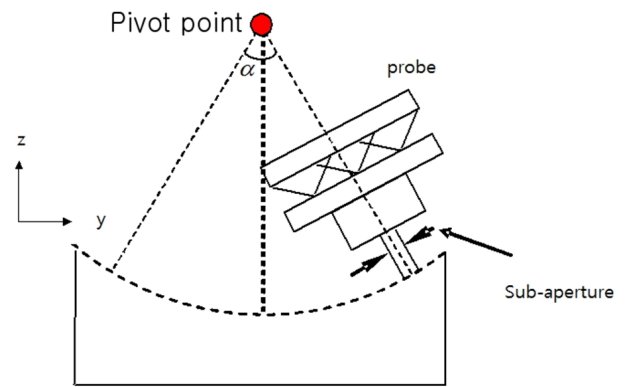


FIG. 3. Surface scanning method with no slope terms.

형상을 측정할 경우 곡률은 식 (2)와 같이 이차미분으로만 정의된다.

$$\frac{d^2 z(y)}{dy^2} = k(y) \quad (2)$$

기하학적으로 3차원 공간상에 존재하는 한 점의 형상은 식 (3)과 같이 3개의 이차미분으로 표현이 가능하다.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad (3)$$

식 (3)은 한 지점에서 x축 방향의 이차미분, y축 방향의 이차미분과 더불어 x축과 y축의 교차미분항을 각각 나타낸다. 3개의 이차미분항을 이용해 형상을 복원하는 방법과 절차는 Fig. 4와 같다. x축 이차미분항과 교차미분항을 이용하여 x축 방향의 기울기를 복원하고, y축 이차미분항과 교차미분항을 이용하여 y축 방향의 기울기를 각각 복원할 수 있다. 일단 x축과 y축 방향의 기울기가 각각 복원되면, 기존의 기울기 측정법과 같이 두 방향의 기울기로부터 전체 형상을 복원할 수 있다.

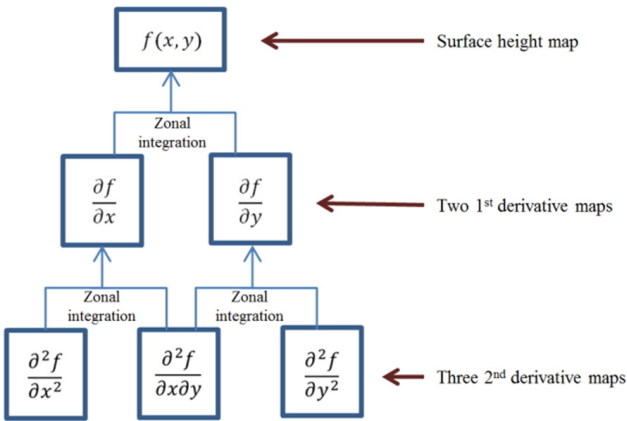


FIG. 4. Schematic block diagram showing the two-step integration process.

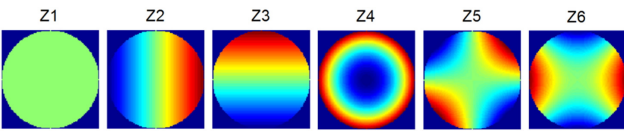


FIG. 5. The first 6 Zernike polynomials.

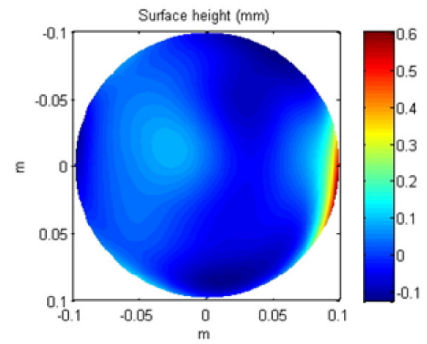
측정 대상 표면 중 임의의 국부영역에서 3개 이차미분값을 결정하기 위해 Fig. 5와 같이 Zernike다항식 중 6개 저차항을 기저함수(basis function)로 국부형상과 맞춤(fitting)을 수행하고 맞춤의 결과로부터 식 (4)와 같이 3개의 이차미분값을 결정하였다.^[13]

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4a_4 + 2a_6, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4a_4 - 2a_6, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2a_5, \quad (4)$$

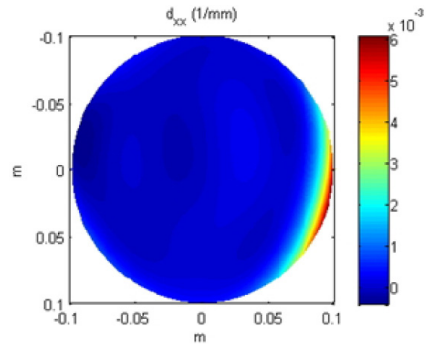
여기서 a_n 은 n 번째 Zernike 계수를 나타낸다.

III. 자유곡면 형상복원 결과

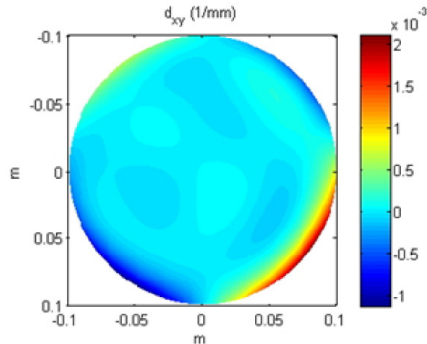
형상이차미분을 이용한 3차원 형상 복원법을 검증하기 위하여 Fig. 6(a)와 같이 임의의 자유곡면을 생성시켰다. 생성된 임의의 형상은 Zernike계수를 임의로(random) 발생시켜 생성한 자유곡면형상으로 직경 200 mm, 최대 Sag는 0.8 mm 이하다. 시뮬레이션을 위해 사용한 측정점 수는 501×501 이므로, 횡방향 측정분해능을 0.4 mm 간격으로 유지하였다. 0.4 mm 간격으로 이동하며 각 국부형상으로부터 Zernike 6개 저차항을 맞춤하여 3개의 이차미분값을 각각 획득하였다. Fig. 6(b)는 x축 방향의 이차미분값, Fig. 6(c)는 교차미분값, Fig. 6(d)는 y축방향 이차미분값을 2차원적으로 표현한 결과이다. Fig. 4의 각 단계별 적분을 위해 Southwell 적분법을 적용하였으며,^[14] 3개의 이차미분을 이용해 복원한 일차미분값은 Fig. 7과 같다. Fig. 7(a)는 Fig. 6(a)와 Fig. 6(b)를 이용하여 복원한 x방향 기울기이며, Fig. 7(b)는 Fig. 6(b)와 Fig. 6(c)



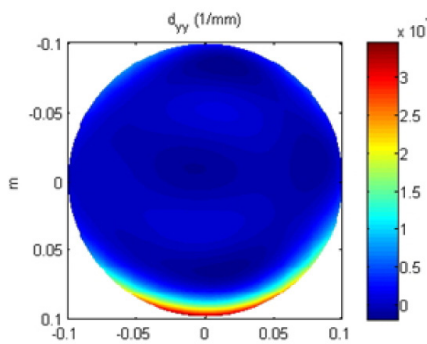
(a)



(b)



(c)



(d)

FIG. 6. Synthetic freeform aspheric surface and its three second derivative maps. (a) Original synthetic surface, (b) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, (c) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, (d) $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

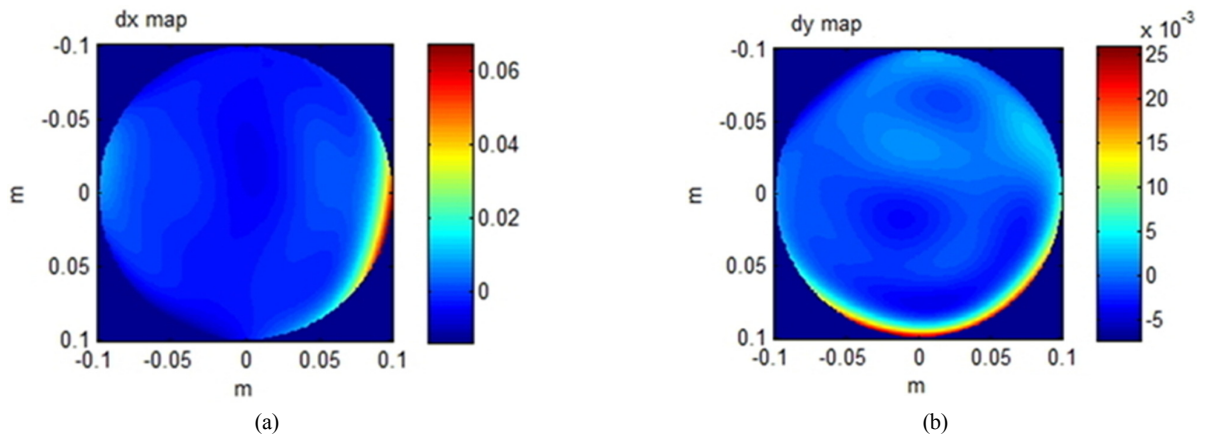


FIG. 7. Reconstructed two slope maps along the two direction. (a) Original synthetic surface, (b) $\frac{\partial z}{\partial x}$, (c) $\frac{\partial z}{\partial y}$.

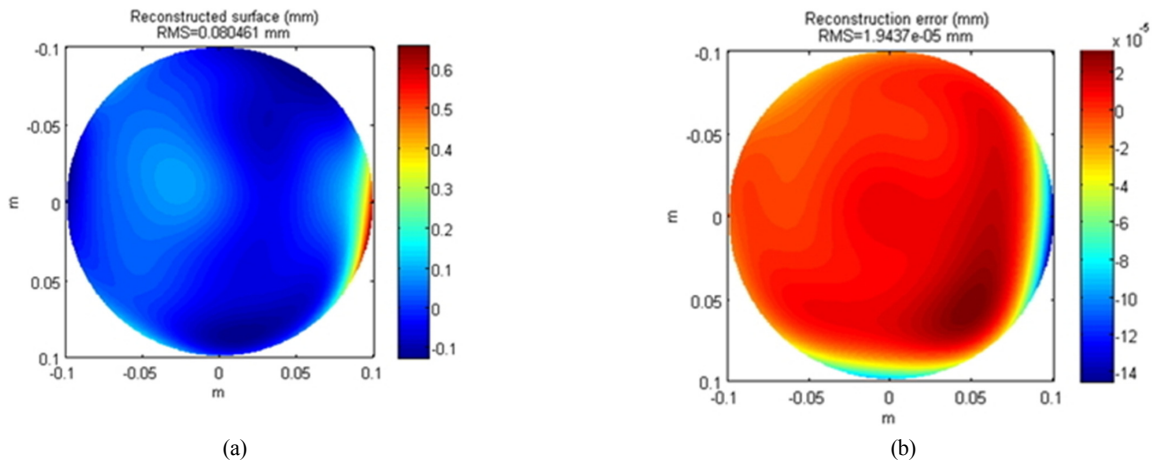


FIG. 8. Reconstructed result using Southwell method and reconstruction error map. (a) Reconstructed surface, (b) Reconstructed error map.

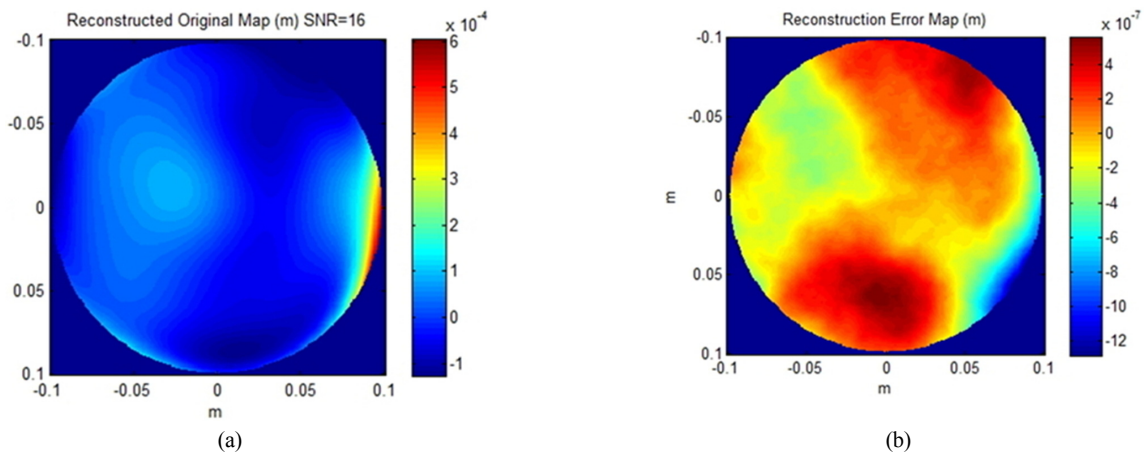


FIG. 9. Reconstruction result and error map under SNR=16 noise level. (a) Reconstructed surface under SNR=16, (b) Reconstructed error map under SNR=16.

를 이용하여 복원한 y방향 기울기 복원결과이다. Fig. 7(a)와 Fig. 7(b)의 일차미분 기울기 복원결과를 이용하여 최종적으로 Fig. 8(a)와 같이 자유곡면형상을 복원하였다. Fig. 8(b)는

최초에 임의로 생성시킨 자유곡면형상과 최종적으로 복원된 곡면형상 사이의 오차를 나타내며, 비교결과 RMS 19.437 nm의 차이를 보였다. 발생한 오차는 각 국부영역에서 Zernike

맞춤과정에서 발생한 맞춤오차 및 임의로 생성시킨 자유곡면형상 중 급격히 형상이 변화되는 가장자리에서 크게 발생된 것으로 진단되어진다. 또한, 수평 분해능은 샘플링 간격에 좌우되며, 일반적으로 폴리싱 과정을 통해 고주파 표면거칠기가 최소화된 광학식 표면의 경우에 적용이 가능하다.

IV. 형상복원법의 노이즈 민감도 진단

본 논문에서 제시한 자유곡면형상 복원법에서는 이차미분값이 국부영역에서 획득되어야 할 측정값에 해당된다. 즉, 이차미분값을 결정하는 단계에서 외부 노이즈가 추가될 수 있는 여지가 발생한다. 따라서 실제 측정과정에서 삽입될 수 있는 이차미분값의 노이즈 발생에 대한 복원오차 민감도를 진단하였다. 식 (5)와 같이 3개의 이차미분값에 가우시언 랜덤 노이즈(Gaussian Random Noise)를 각각 부가시켜 형상을 복원하였으며, 기존 이차미분값과 삽입된 노이즈 사이의 비를 SNR(Signal-to-Noise)로 표현하였다.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \pm \delta_{xx}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \pm \delta_{yy}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \pm \delta_{xy} \quad (5)$$

이차미분 측정값에 SNR ∞, 16, 4, 1의 가우시언 랜덤 노이즈를 삽입한 경우 복원된 형상오차는 각각 RMS 19 nm, 197 nm, 392 nm, 1120 nm 형상복원오차를 보였다. Fig. 9(a)와 Fig. 9(b)는 SNR16의 경우 복원된 형상과, 형상복원오차를 나타낸다.

V. 결 론

자유곡면형상을 측정하고 복원하는 방법으로, 국부영역에서 이차미분을 측정하여 전체형상을 복원하는 방법을 제안하였다. Frenet's 비선형 미분방정식의 특별해(Exact solution)인 곡률을 이용해 형상을 복원하는 기존의 곡률법은 한 방향으로만 형상을 복원하는 반면, 이차미분을 이용한 방법에서는 직교한 두 방향으로 동시에 형상을 복원할 수 있는 가능성이 있음을 시뮬레이션을 통해 검증하였다. 검증 결과 200 mm 영역에서 0.4 mm 횡방향 분해능의 조건에서 RMS 19 nm 복원오차를 보였으며, 이차미분 노이즈에 대한 복원 민감도 진단에서는 SNR16의 가우시언 랜덤 노이즈에 대해 197 nm의 형상복원오차가 발생함을 보였다.

References

1. B. C. Kim, M. C. Kwon, B. U. Choo, and I. J. Yoon, "3-D shape measurement using curvature data," Proc. SPIE **7389**, 73892H-8 (2009).
2. P. E. Glenn, "Angstrom level profilometry for submillimeter to meter scale surface errors," in *Advanced Optical Manu-*

- facturing and Testing*, G. M. Sanger, P. B. Reid, and L. R. Baker, eds., Proc. SPIE **1333**, 326-336 (1990).
3. P. E. Glenn, "Lambda-over-one-thousand metrology results for steep aspheres using a curvature profiling technique," in *Advanced Optical Manufacturing and Testing II*, V. J. D. D. V. M. ed., Proc. SPIE **1531**, 61-64 (1992).
4. P. Thomsen-Schmidt, M. Schulz, and I. Weingartner, "A facility for the curvature-based measurement of the nanotopography of complex surfaces," in *Optical Devices and Diagnostics in Materials Science*, D. L. Andrew, T. Asakura, S. Jutamulia, W. P. Kirk, M. G. Lagally, R. B. Lal, and J. D. Trolinger eds., Proc. SPIE **4098**, 94-101 (2000).
5. I. Weingartner, M. Schulz, P. Thomsen-Schmidt, and C. Elster, "Measurement of steep aspheres: A step forward to nanometer accuracy," in *Optical Metrology for the Semiconductor, Optical, and Data Storage Industries II*, A. Duparre and B. Singh, eds., Proc. SPIE **4449**, 195-204 (2001).
6. M. Schulz, "Topography measurement by a reliable large-area curvature sensor," *Optik* **112**, 86-90 (2001).
7. M. Schulz and I. Weingartner, "Measurement of steep aspheres by curvature scanning: An uncertainty budget," Proc. 2nd Euspen International Conference, 478-481 (2001).
8. C. Elster, J. Gerhardt, P. Thomsen-Schmidt, M. Schulz, and I. Weingartner, "Reconstructing surface profiles from curvature measurements," *Optik* **113**, 154-158 (2002).
9. M. Schulz, R. D. Geckeler, and J. Illemaan, "High accuracy form measurement of large optical surfaces," in *Recent Developments in Traceable Dimensional Measurements II*, J. E. Decker and N. Brown, eds., Proc. SPIE **5190**, 211-219 (2003).
10. B. C. Kim, T. Saiag, Q. Wang, J. Soons, R. S. Polvani, and U. Griesmann, "The geometry measuring machine (GEMM) project at NIST," in *Free-Form Optics: Design, Fabrication, Metrology, Assembly, ASPE 2004 Winter Topical Meeting* (North Carolina, USA, 2004), pp. 108-111.
11. U. Griesmann, N. Machkour-Deshayes, J. Soons, B. C. Kim, Q. Wang, J. R. Stoup, and L. Assoufid, "Uncertainties in aspheric profile measurements with the geometry measuring machine at NIST," in *Advanced Characterization Techniques for Optics, Semiconductors, and Nanotechnologies II*, A. Duparre, B. Singh, Z. Gu, eds., Proc. SPIE **5878**, 112-124 (2005).
12. Y. K. Kwon, B. C. Kim, D. H. Wang, Y. W. Lee, H. S. Yang, and H. G. Rhee, "Aspheric measurement based on the curvature sensing method," Proc. SPIE **6671**, 667119-667126 (2007).
13. D. W. Kim, B. C. Kim, C. Zhao, C. J. Oh, and J. H. Burge, "Algorithm for surface reconstruction from curvature data for freeform aspheric," *Optical Manufacturing and Testing X*, Proc. SPIE **8838**, 88380B1-9 (2013).
14. W. H. Southwell, "Wavefront estimation from wave-front slope measurements," *JOSA* **70**, 998-1006 (1980).